يتقدّم فريق بوابة واثق
بالشكر الجزيل لمن أبدع في
عمل هذا المرجع الشامل،
جعله الله في ميزان حسناته

٢) التوافيق

التوافيق :- هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء مأخوذة كلها أو بعضها بصرف النظر عن ترتيبها فمثلا ($\overset{٥}{\underset{٢}{\ }}$) هى عدد المجوعات الجزئية التى كل منها يتكون من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من ٥ عناصر بصرف النظر عن الترتيب

أما $\overset{٥}{ل_٢}$ هى عدد المجوعات الجزئية التى كل منها يتكون من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من ٥ عناصر مع مراعاة الترتيب

قوانين التوافيق

(١) $\binom{ن}{ر} = \frac{ن\,ل_ر}{ر!}$ (٢) $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر\,!\,(ن-ر)!}$

(٣) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$ (قانون التبسيط) فمثلا $\binom{٧}{٥} = \binom{٧}{٢}$

(٤) $\binom{ن}{ن} = \binom{ن}{٠} = ١$

(٥) إذا كان $\binom{ن}{س} = \binom{ن}{ص}$ فان س = ص أو ن = س + ص

(٦) $\frac{\binom{ن}{ر}}{\binom{ن}{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$ (قانون النسبة) فمثلا $\frac{\binom{٩}{٤}}{\binom{٩}{٣}} = \frac{١+٤-٩}{٤} = \frac{٦}{٤}$

لايجاد النسبة بين حدين غير متتاليين

$$\frac{\binom{٨}{٥}}{\binom{٨}{٣}} = \frac{\binom{٨}{٤}}{\binom{٨}{٤}} \times \frac{\binom{٨}{٣}}{\binom{٨}{٥}} = \frac{٨-٤}{٥} \times \frac{٨-٣}{٤} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{٤} = ١$$

$$\frac{\binom{\text{ن}}{\text{الكبير}}}{\binom{\text{ن}}{\text{الصغير}}} = \frac{\text{ن} - \text{الصغير}}{\text{الكبير}}$$

مثال

إذا تم اختيار شخصين من بين أربعة على أن يكون من بينهما الرئيس ونائبه يكون

$$ل^{٤}_{٢} = ٤ \times ٣ = ١٢$$

بينما إذا تم اختيار شخصين من بين أربعة دون تحديد فتكون

$$\binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$$

.....

بكم طريقة يمكن اختيار فريق كرة سلة مكون من خمسة لاعبين من بين ١٠ طلاب متميزين ؟

الحـــــــل

عد طرق الاختيار

$$= \binom{١٠}{٥} = \frac{٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = ٢٥٢ \text{ طريقة}$$

مثال

أعلنت شركة عن وجود ٥ وظائف بها يشترط أن تشغل سيدتان وظيفتين منها فتقدم لها ٧ رجال ، ٤ سيدات بكم طريقة يمكن أختيار الاشخاص الخمسة

الحـــــــل

يمكن أختيار ٣ رجال بطرق عددها $= \binom{٧}{٣} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$

يمكن أختيار سيدتان بطرق عددها $= \binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$

عدد الطرق الممكنة لاختيار الاشخاص الخمسة $= ٣٥ \times ٦ = ٢١٠$

مثال

إذا أريد أنتخاب ١١ رجل من بين ١٤ رجلا فما عدد الطرق للانتخاب

الحـــــــل

عدد الطرق $= \binom{١٤}{١١} = \binom{١٤}{٣} = \frac{١٤ \times ١٣ \times ١٢}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٦٤$

مثال

بكم طريقة يمكن انتخاب ٣ لجان كل منها يتكون من شخصين من بين ١٠ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص فى أكثر من لجنة واحدة ؟

الحـــــــل

يمكن أنتخاب اللجنة الاولى بعدد من الطرق $= \frac{٩ \times ١٠}{١ \times ٢} = ٤٥$ طريقة

إذا انتخبنا اثنين للجنة الاولى يتبقى ٨ أشخاص ينتخب منهم ٢ للجنة الثانية بعدد من الطرق

$= \binom{٨}{٢} = \frac{٧ \times ٨}{١ \times ٢} = ٢٨$ طريقة

وأخيرا يتبقى ٦ أشخاص ينتخب منهم ٢ للجنة الثالثة بعدد من الطرق

$= \binom{٦}{٢} = \frac{٥ \times ٦}{١ \times ٢} = ١٥$ طريقة

∴ عدد الطرق التى يمكن بها اختيار اللجان الثلاث $= ٤٥ \times ٢٨ \times ١٥ = ١٨٩٠٠$

مثال

أعلنت شركة عن وجود ٥ وظائف بها يشترط أن تشغل سيدتان وظيفتين منها فتقدم لها ٧ رجال ، ٤ سيدات بكم طريقة يمكن أختيار الاشخاص الخمسة

الحـــــــل

يمكن أختيار ٣ رجال بطرق عددها $= \binom{٧}{٣} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} = ٣٥$

يمكن أختيار سيدتان بطرق عددها $= \binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{١ \times ٢} = ٦$

عدد الطرق الممكنة لاختيار الاشخاص الخمسة $= ٣٥ \times ٦ = ٢١٠$

مثال

إذا أريد أنتخاب ١١ رجل من بين ١٤ رجلا فما عدد الطرق للانتخاب

الحـــــــل

عدد الطرق $= \binom{١٤}{١١} = \binom{١٤}{٣} = \frac{١٢ \times ١٣ \times ١٤}{١ \times ٢ \times ٣} = ٣٦٤$

مثال

أوجد قيمة كلا من $\binom{١٠}{٣}$ ، $\binom{١٣}{٤}$ ، $\binom{٢٠}{١٧}$ ، $\binom{١٥}{٠}$ ، $\binom{١}{١٠}$

الحـــــــل

$\binom{١٠}{٣} = \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٢٠$ $\binom{١٣}{٤} = \frac{١٠ \times ١١ \times ١٢ \times ١٣}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٧١٥$

$\binom{٢٠}{١٧} = \binom{٢٠}{٣} = \frac{١٨ \times ١٩ \times ٢٠}{١ \times ٢ \times ٣} =$

$\binom{١٥}{٠} = ١$ $\binom{١٠}{١٠} = ١$

مثال إذا كان $\binom{ن}{٣} = ١٠$ أوجد قيمة ن

الحـــــــل

$\binom{ن}{٣} = ٢٠$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٠$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٦٠$

٦٠

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٥ \times ٤ \times ٣$

$ن = ٥$

حل أخر $\binom{ن}{٣} = ١٠$

$\frac{ل^{ن}_{٣}}{!٣} = ١٠$

$ل^{ن}_{٣} = ١٠ \times !٣ = ١٠ \times ٣ \times ٢ \times ١ =$

$ل^{ن}_{ن} = ٣ \times ٤ \times ٥$

$ن = ٥$

قانون التبسيط

$\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$

مثال إذا كان $\binom{ن}{ن-٢} = ٤٥$ أوجد ن

الحـــــــل

$\binom{ن}{ن-٢} = ٤٥$

$\binom{ن}{٢} = ٤٥$

$\frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} = ٤٥$

$ن(ن-١) = ٩٠$

$ن^{٢} - ن - ٩٠ = ٠$

$(ن-١٠)(ن+٩) = ٠$

$ن = ١٠$ $ن = -٩$ (مرفوض)

مثال إذا كان $\binom{\text{ن}}{٣} : \binom{\text{ن}+٢}{٤} = ٥ : ١٨$ فما قيمة ن ؟

الحـــــل

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٣)! \times ٣!} \times \frac{(\text{ن}+٢-٤)! \times ٤!}{(\text{ن}+٢)!} = \frac{٥}{١٨}$$

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٣)! \times ٣!} \times \frac{(\text{ن}-٢)! \times ٤!}{(\text{ن}+٢)!} = \frac{٥}{١٨}$$

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٣)! \times ٣!} \times \frac{(\text{ن}-٢)(\text{ن}-٣)! \times ٤ \times ٣!}{(\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)\text{ن}!} = \frac{٥}{١٨}$$

$$\frac{٤\text{ن}-٨}{\text{ن}^{٢}+٣\text{ن}+٢} = \frac{٥}{١٨}$$

$$٥\text{ن}^{٢}+١٥\text{ن}+١٠ = ٧٢\text{ن}-١٤٤$$

$$٥\text{ن}^{٢}-٥٧\text{ن}+١٥٤ = ٠$$

$$(\text{ن}-٧)(٥\text{ن}-٢٢) = ٠$$

$\text{ن} = ٧$ $\quad$ $\text{ن} = \frac{٢٢}{٥}$ (مرفوض)

مثال إذا كان $\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}} = ٧٢٠$ ، $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = ١٢٠$ أوجد قيمة كلا من ن ، ر

الحـــــل

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = ١٢٠$$

$$\frac{\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}}}{\text{ر}!} = ١٢٠$$

$$\frac{٧٢٠}{\text{ر}!} = ١٢٠$$

$$\text{ل}_{٣}^{\text{ن}} = ٧٢٠$$

$$\text{ل}_{٣}^{\text{ن}} = ١٠ \times ٩ \times ٨$$

$$\text{ن} = ١٠$$

$١٢٠ \times \text{ر}! = ٧٢٠ \Longleftarrow \text{ر}! = ٦$

$\text{ر}! = ٣ \times ٢ \times ١ \Longleftarrow \text{ر} = ٣$

مثال إثبت أن $\binom{ن-١}{م} + \binom{ن-١}{م+١} = \binom{ن}{م+١}$ ومن ذلك

أوجد قيمة $\binom{١٠}{٦} + \binom{١٠}{٧}$

الحـــــــل

$$\text{الايمن} = \frac{!(ن-١)}{م! \times !(ن-م-١)} + \frac{!(ن-١)}{!(م+١)\ !(ن-م-٢)}$$

$$= \frac{!(ن-١)}{م!\ (ن-م-١)!(ن-م-٢)!} + \frac{!(ن-١)}{(م+١)\times م! \times !(ن-م-٢)}$$

$$= \frac{!(ن-١)}{م! \times !(ن-م-٢)} \left[\frac{١}{ن-م-١} + \frac{١}{م+١}\right]$$

$$= \frac{!(ن-١)}{م! \times !(ن-م-٢)} \times \frac{م+١+ن-م-١}{(ن-م-١)(م+١)} = \frac{!(ن-١)}{م! \times !(ن-م-٢)} \times \frac{ن}{(ن-م-١)(م+١)}$$

$$= \frac{!ن}{!(م+١) \times !(ن-م-١)} = \binom{ن}{م+١}$$

$$\text{المقدار} = \binom{١٠}{٦} + \binom{١٠}{٧} = \binom{١١}{٧} = \frac{٨ \times ٩ \times ١٠ \times ١١}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٣٣٠$$

مثال إثبت أن $\binom{ن}{ر} = \frac{ن}{ن-ر} \times \binom{ن-١}{ر}$

$$\text{الايسر} = \frac{ن}{ن-ر} \times \frac{!(ن-١)}{ر! \times !(ن-ر-١)} = \frac{ن\ !(ن-١)}{ر!\ (ن-ر)\ !(ن-ر-١)}$$

$$= \frac{!ن}{ر!\ !(ن-ر)} = \binom{ن}{ر} = \text{الايمن}$$

إذا كان $(س^{ن}) = (ص^{ن})$ فان

(١) س = ص أو (٢) ن = س + ص

مثال أوجد قيمة س التى تحقق أن $(٢س^{١٤}) = (٣س - ٦)^{١٤}$

الحـــــــل

أما ٢س = ٣س – ٦ أو ٢س +٣س -٦ = ١٤

٢س – ٣س = -٦ ٥س = ١٤ + ٦

- س = -٦ ٥س = ٢٠

س = ٦ س = ٤

مثال إذا كان $(٣س^{١١}) = (س^{٢} - ٧)^{١١}$ أوجد قيمة س

الحـــــــل

٣س = $س^{٢}$ – ٧ أو ٣س + $س^{٢}$ – ٧ = ١١

$س^{٢}$ – ٣ س – ٧ = ٠ $س^{٢}$ + ٣س – ١٨ = ٠

لا تحلل (س + ٦)(س – ٣) = ٠

س = -٦(مرفوض) س = ٣

مثال إذا كان $(٤ر^{٧٥}) = (٣ر + ٥)^{٧٥}$ أوجد قيمة ر

الحـــــــل

٤ ر = ٣ ر +٥ أو ٤ ر +٣ر +٥ = ٧٥

٤ ر – ٣ ر = ٥ ٧ر = ٧٥ – ٥

ر = ٥ ٧ر = ٧٠

ر = ١٠

قانون النسبة

$$\frac{(\text{ر})^{\text{ن}}}{(\text{ر}-١)^{\text{ن}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \quad \text{أو} = \frac{\text{ن} - \text{الصغير}}{\text{الكبير}}$$

مثال أوجد قيمة كلا من $\frac{(٧)^{١٥}}{(٦)^{١٥}}$ ، $\frac{(٥)^{١٠}}{(٦)^{١٠}}$ ، $\frac{(٨)^{١٧}}{(٦)^{١٧}}$

الحـــــل

$$\frac{(٧)^{١٥}}{(٦)^{١٥}} = \frac{٦-١٥}{٧} = \frac{٩}{٧} \text{ ،،،،} \frac{(٥)^{١٠}}{(٦)^{١٠}} = \frac{٦}{٥-١٠} = \frac{٦}{٥}$$

$$\frac{(٨)^{١٧}}{(٦)^{١٧}} = \frac{(٨)^{١٧}}{(٧)^{١٧}} \times \frac{(٧)^{١٧}}{(٦)^{١٧}} = \frac{٧-١٧}{٨} \times \frac{٦-١٧}{٧} = \frac{١٠}{٨} \times \frac{١١}{٧} = \frac{٥٥}{٤٢}$$

مثال إذا كان $(\text{ن}_{٤}) : (\text{ن}_{٣}) = \frac{٣}{٢}$ فما قيمة ن

الحـــــل

$$\frac{٣}{٢} = \frac{(\text{ن}_{٤})}{(\text{ن}_{٣})}$$

$$\therefore \frac{٣}{٢} = \frac{\text{ن}-٣}{٤}$$

$$٢\text{ن} - ٦ = ١٢$$
$$٢\text{ن} = ١٨$$
$$\text{ن} = ٩$$

مثال إذا كان $ل_{٢}^{م+ن} = ٢١٠$ ، $\binom{ن-٣}{٣} = ٣٥$ أوجد قيمتى م ، ن

الحـــــل

$ل_{٢}^{م+ن} = ٢١٠ = ١٥ \times ١٤$

$م + ن = ١٥$

$\binom{ن-٣}{٣} = ٣٥$

$\frac{(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)}{١ \times ٢ \times ٣} = ٣٥$

$(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥) = ٧ \times ٦ \times ٥$

$ن - ٣ = ٧$ $ن = ١٠$

بالتعويض فى المعادلة الاولى نجد أن

$م + ١٠ = ١٥$ $م = ٥$

مثال إذا كان $\binom{ن}{٣} : \binom{ن-١}{٤} = ٨ : ٥$ أوجد قيمة ن

الحـــــل

$\frac{\binom{ن}{٣}}{\binom{ن-١}{٤}} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{ن!}{!٣ \times (ن-٣)!} \times \frac{!٤ \times (ن-٥)!}{(ن-١)!} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{ن \ (ن-١)!}{!٣ \ (ن-٣)(ن-٤) \ (ن-٥)!} \times \frac{٤ \times !٣ \times (ن-٥)!}{(ن-١)!} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{٤ن}{ن^{٢} - ٧ن + ١٢} = \frac{٨}{٥}$

$٨ن^{٢} - ٥٦ن + ٩٦ = ٢٠ن$

$٨ن^{٢} - ٧٦ن + ٩٦ = ٠$ ÷٤

$٢ن^{٢} - ١٩ن + ٢٤ = ٠$

$(٢ن-٣)(ن-٨) = ٠$

$ن = ٨$

مثال

إذا كان $\binom{\text{ن}}{٥} = \frac{١}{٢}\left[\binom{\text{ن}}{٤} + \binom{\text{ن}}{٦}\right]$ فما قيمة ن

الحـــــــل

$$٢\binom{\text{ن}}{٥} = \binom{\text{ن}}{٤} + \binom{\text{ن}}{٦}$$

$$٢ = \frac{\binom{\text{ن}}{٤}}{\binom{\text{ن}}{٥}} + \frac{\binom{\text{ن}}{٦}}{\binom{\text{ن}}{٥}}$$

$$٢ = \frac{٥}{\text{ن} - ٤} + \frac{\text{ن} - ٥}{٦}$$

$$٢ = \frac{٣٠ + \text{ن}^{٢} - ٩\,\text{ن} + ٢٠}{٢٤ - ٦\text{ن}}$$

$$٣٠ + \text{ن}^{٢} - ٩\,\text{ن} + ٢٠ = ١٢\text{ن} - ٤٨$$

$$\text{ن}^{٢} - ٢١\,\text{ن} + ٩٨ = ٠$$

$$(\text{ن} - ٧)(\text{ن} - ١٤) = ٠$$

$$\text{ن} = ٧ \qquad \text{ن} = ١٤$$

مثال

إذا كان $\binom{\text{ن}}{٩} < \binom{\text{ن}}{٨}$ إثبت أن ن > ١٧

الحـــــــل

$$\binom{\text{ن}}{٩} < \binom{\text{ن}}{٨}$$

$$\frac{\binom{\text{ن}}{٩}}{\binom{\text{ن}}{٨}} < ١$$

$$\frac{\text{ن} - ٨}{٩} < ١$$

$$\text{ن} - ٨ < ٩$$

$$\text{ن} < ٩ + ٨$$

$$\text{ن} < ١٧$$

مثال إذا كان $(\ ^{ن}_{ر}\ ) : (\ ^{ن}_{ر+١}\ ) : (\ ^{ن}_{ر+٢}\ ) = ٣ : ٨ : ١٤$ أوجد قيمة ن ، ر

الحـــــــل

$$\frac{٨}{٣} = \frac{(\ ^{ن}_{ر+١}\ )}{(\ ^{ن}_{ر}\ )}$$

$$\frac{٨}{٣} = \frac{ن - ر}{ر+١}$$

$$٣ن - ٣ر = ٨ر + ٨$$

$$٣ن - ١١ر = ٨ \quad (١)$$

$$\frac{١٤}{٨} = \frac{(\ ^{ن}_{ر+٢}\ )}{(\ ^{ن}_{ر+١}\ )}$$

$$\frac{٧}{٤} = \frac{ن - ر - ١}{ر + ٢}$$

$$٤ن - ٤ر - ٤ = ٧ر + ١٤$$

$$٤ن - ١١ر = ١٨ \quad (٢)$$ وبحل المعادلتين معا

$$٤ن - ١١ر = ١٨$$

$$٣ن - ١١ر = ٨$$

بالطرح

$$ن = ١٠$$

بالتعويض فى الاولى

$$٣\times١٠ - ١١ر = ٨$$

$$-١١ر = ٨ - ٣٠ = -٢٢$$

$$ر = ٢$$

مثال إذا كان $(\ ^{ر}_{٥}\ )^{٢} = (\ ^{ر+١}_{٦}\ ) \times (\ ^{ر}_{٤}\ )$ أوجد قيمة ر

الحـــــــل

$$(\ ^{ر}_{٥}\ ) \times (\ ^{ر}_{٥}\ ) = (\ ^{ر+١}_{٦}\ ) \times (\ ^{ر}_{٤}\ )$$

$$\frac{(\ ^{ر}_{٥}\ )}{(\ ^{ر}_{٤}\ )} = \frac{(\ ^{ر+١}_{٦}\ )}{(\ ^{ر}_{٥}\ )}$$

$$\frac{ر - ٤}{٥} = \frac{(ر+١)!}{!٦ \times (ر - ٥)!} \times \frac{!٥ \times (ر - ٥)!}{!ر}$$

$$\frac{ر - ٤}{٥} = \frac{ر + ١}{٦}$$

$$٦ر - ٢٤ = ٥ر + ٥$$

$$٦ر - ٥ر = ٥ + ٢٤$$

$$ر = ٢٩$$